MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA GEOMETRI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh

LYLY YULIARNI
10954008034

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2013

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA GEOMETRI

LYLY YULIARNI
10954008034

Tanggal Sidang : 01 November 2013
Tanggal Wisuda :   Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode numerik merupakan alternatif dari permasalahan persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, salah satu metode numerik yang sering digunakan adalah Runge-Kutta. Selanjutnya, diperoleh galat pemotongan dari modifikasi Runge-Kutta Kunntzmann berdasarkan rata-rata geometri pada orde 5 ($O(h^5)$). Untuk melakukan perbandingan terhadap pendekatan deret maka dilakukan simulasi numerik yang menghasilkan galat pada Runge-Kutta orde empat Kuntzmann lebih baik dari pada Runge Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan pendekatan geometri, kontra harmonik dan harmonik pada persamaan diferensial $y' = y$ dan $y' = -y$, sedangkan untuk persamaan diferensial $y' = \frac{1}{y}$ galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri lebih baik dari pada Runge-Kutta orde empat berdasarkan pendekatan yang lainnya.

Kata kunci: *Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann, Rata-rata Geometri, Deret Taylor*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "**Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Geometri**". Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar Sarjana (S1). Shalawat serta salam penulis sembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penerang dan penunjuk jalan yang lurus bagi seluruh umat manusia.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama kali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada ayahanda (Parman) dan ibunda (Sadrita) kedua orang yang kucintai dan kusayangi semoga Allah SWT selalu merahmati ayah dan ibu, memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Yenita Morena, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus penasehat akademik penulis.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak mendukung, membantu, mengarahkan, membimbing dan mengajarkan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir dapat selesai.
6. Bapak Dr. Rado Yendra, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritik dan saran sehingga tugas akhir ini dapat selesai.
7. Ibu dan Bapak dosen jurusan Matematika yang tidak pernah lelah memberikan ilmu kepada kami.

8. Abang, kakak serta adikku (Riko, Jhoni, Lia, Alex, Asep) yang telah memberikan dukungan motivasi serta doa yang tidak terbalas.
9. Sahabatku (Deni, Rayna, Mirna, Iswanti, Darmi, Nurfadhli) yang selalu memberi dukungan kepada penulis.
10. Teman – teman jurusan Matematika angkatan 2009, kakak dan adik tingkat jurusan Matematika angkatan pertama–terakhir, dan teman–teman yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis sadar masih banyak kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 01 November 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa orde satu terkadang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Untuk itu, sebagai alternatif dalam penyelesaian persamaan diferensial orde satu digunakan metode numerik yang memiliki solusi berupa nilai hampiran.

Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu adalah metode Runge-Kutta, dikarenakan Runge-Kutta memiliki ketelitian yang lebih baik tanpa memerlukan turunan yang lebih tinggi. Runge-Kutta mempunyai beberapa bentuk sesuai dengan pengambilan parameter bebasnya, diantaranya adalah Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann.

Beberapa peneliti telah melakukan modifikasi pada bentuk umum Runge-Kutta orde empat dengan menggunakan pendekatan deret, diantaranya modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata geometri dengan peneliti Evans (1991) yang melakukan penelitian dengan memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik berdasarkan rata-rata geometri dan memperoleh bentuk modifikasi sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\square}{3}\left(\overline{k_1 k_2} + \overline{k_2 k_3} + \overline{k_3 k_4} \right)$$

dengan :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{\square}{2}, y_n + \frac{\square}{2} k_1)$$

$$k_3 = f \quad x_n + \frac{\square}{2}, y_n + \frac{\square}{16} \quad -k_1 + 9k_2$$

$$k_4 = f \quad x_n + \frac{\square}{2}, y_n + \frac{\square}{24} \quad -3k_1 + 5k_2 + 22k_3 \tag{1.1}$$

Peneliti selanjutnya adalah Roni (2011) yang melakukan penelitian dengan memodifikasi Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata geometri, modifikasi selajutnya Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik (Evans dkk (1994), Eka (2011)) dan Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata kontra harmonik (Yakub dan Evans (1995), Ababneh dkk (2009), Supinah (2010)).

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, penulis tertarik untuk mengembangkan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri. Diharapkan dengan penelitian ini dapat memperkaya modifikasi dengan pendekatan deret terutama berdasarkan rata-rata geometri.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah "Bagaimana menentukan rumusan modifikasi Runge-Kutta orde empat kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri ".

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya pembahasan pada tugas akhir ini, maka penulis membatasi masalah yaitu metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, rata-rata geometri, persamaan diferensial biasa orde satu dan simulasi numerik dengan menggunakan perangkat lunak *Matlab*.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam tugas akhir ini adalah menemukan rumusan baru modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri.

1.5 Sistematika Penulisan

Untuk terarahnya penulisan tugas akhir ini, maka penulis membagi kepada beberapa bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini menguraikan latar belakang pemilihan judul, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang metode-metode yang dilakukan dalam menemukan bentuk baru dari penelitian.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan langkah-langkah dan hasil dari pembuktian persamaan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini memuat penjelasan dasar teori yang mendukung penyelesaian tugas akhir ini. Adapun landasan teori sebagai berikut :

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial orde satu di bahas pada landasan teori ini karena hasil dari modifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu. Persamaan diferensial biasa orde satu adalah suatu persamaan yang memuat turunan pertama suatu fungsi yang belum diketahui. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n mempunyai bentuk :

$$F\left(x, y', y'', \cdots, y^{n}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

Tingkat atau orde suatu persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut. Seperti $y' = \frac{dy}{dx}$ disebut orde pertama, $y'' = \frac{d^2y}{d^2x}$ disebut orde dua dan seterusnya sampai orde *n*, dan penulisan tugas akhir ini hanya akan membahas persamaan diferensial biasa orde satu.

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai berikut :

$$y' = f\left(x, y\right), y\left(x_0\right) = y_0 \qquad (2.2)$$

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor adalah deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial.

Teorema 2.1 (Robert G. Bartle dkk, 2000) Misalkan $n \in N$ dan $I = [a, b]$, $f: I \to R$ dan $f', f'', f''', \cdots, f^{n}$ adalah kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$ maka untuk sembarang x di I terdapat titik c diantara x dan x_0 sehingga :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.3)$$

Bukti : Misal diberikan x_0 dan x dan memisalkan $J = [x_0, x]$. Didefenisikan fungsi F pada J dengan

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t), t \in J \qquad (2.4)$$

Selanjutnya turunkan persamaan (2.4) terhadap *t* dengan dimisalkan :

$$u = (x - t), u' = -1, v = f'(t), v' = f''(t)$$

$$uv = u'v + uv'$$

$$= (-1)f'(t) + (x - t)f''(t)$$

$$F'(t) = 0 - f'(t) + f'(t) - (x - t)f''(t)$$

Maka diperoleh :

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{n+1}(t) \qquad (2.5)$$

pada J didefinisikan juga fungsi G dengan

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0), t \in J \qquad (2.6)$$

dari $G(x_0) = G(x) = 0$. Terdapat c diantara x dan x_0 pada J sehingga diperoleh:

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x - c)^n}{(x - x_0)^{n+1}}F(x_0)$$

atau

$$F(x_0) = \frac{-F'(c)}{(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}} \qquad (2.7)$$

Jika $t = c$ pada persamaan (2.5) disubsitusikan ke persamaan (2.7) maka diperoleh:

$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c)$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.8)$$

Dengan memisalkan $t = x_0$ disubsitusikan ke persamaan (2.4), maka diperoleh :

$$F(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2.9)$$

Kemudian persamaan (2.8) disubsitusikan ke persamaan (2.9) , maka diperoleh :

$$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = f(x) - f(x_0) - f'(x - x_0) - \cdots$$
$$- \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2.10)$$

dengan melakukan operasi aljabar diperoleh :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$+ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \blacksquare$$

Misalkan $h = x - x_0$ maka ekspansi $f(x_0 + h)$ disekitar x_0 diperoleh :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)$$

Bentuk persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

atau

$$y' = f(x_0, y_0) = f \qquad (2.11)$$

Oleh karena itu bentuk turunan persamaan diferensial berikutnya adalah :

$$y'' = f''(x_0, y_0) = f_x + y'f_y$$
$$= f_x + ff_y \qquad (2.12)$$

$$y''' = f'''(x_0, y_0) = f_{xx} + 2y'f_{xy} + y''f_y + f_{yy}(y')^2$$
$$= f_{xx} + 2ff_{xy} + f_xf_y + ff_y^{\,2} + f_{yy}f^2 \qquad (2.13)$$

$$y^{(4)} = f^4(x_0, y_0) = f_{xxx} + 3y' f_{xxy} + 3y'' f_{xy} + y''' f_y + 3(y')^2 f_{xyy}$$
$$+ 3y' y'' f_y + f_{yyy}(y')^3$$
$$= f_{xxx} + 3f f_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5f f_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3f f_x f_{yy}$$
$$+ 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x {f_y}^2 + f {f_y}^3 \qquad (2.14)$$

Deret Taylor dari persamaan (2.11), (2.12), (2.13) dan (2.14) adalah :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_x + f f_y)$$
$$+ \frac{h^3}{3!}(f_{xx} + 2f f_{xy} + f_x f_y + f {f_y}^2 + f_{yy} f^2)$$
$$+ \frac{h^4}{4!}(f_{xxx} + 3f f_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5f f_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3f f_x f_{yy}$$
$$+ 4f f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x {f_y}^2 + f {f_y}^3) + O(h^5) \qquad (2.15)$$

Dengan hanya mengambil turunan *y* maka persamaan (2.15) menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!} f f_y + \frac{h^3}{6}(f {f_y}^2 + f_{yy} f^2) + \frac{h^4}{24}(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy}$$
$$+ f {f_y}^3)$$

2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Metode Runge-Kutta merupakan metode pengembangan dari deret Taylor yang memiliki ketelitian yang lebih baik tanpa memerlukan turunan yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat yang utama :

1. Metodenya satu langkah, untuk mencapai y_{m+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_m, y_m.
2. Mendekati ketelitian metode deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai *p* berbeda untuk metode yang berbeda, dan *p* disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Secara umum bentuk dari metode Runge-Kutta adalah :

$$y_{n+1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_i k_i$$

dengan :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_1 h, y_n + a_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + c_2, y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_i = hf(x_n + c_{i-1}h, y_n + a_{i-1,1}k_1 + a_{i-1,2}k_2 + \cdots + a_{i-1,i-1}k_{i-1}) \quad (2.16)$$

Perhatikan bahwa k adalah hubungan yang selalu berulang, k_1 hadir dalam persamaan untuk k_2, k_2 hadir untuk persamaan k_3, dan seterusnya. (Lapidus dkk, 1971) Metode Runge-Kutta dengan *n* langkah dapat ditunjukkan kedalam sebuah tabel, tabel ini dikenal sebagai tabel Butcher, berikut adalah bentuk umum Runge-Kutta digambarkan ke dalam Tabel Butcher.

Tabel 2.1 Tabel Butcher Runge-Kutta orde-*n*

0	0	0	0	$\cdots$	0
c_1	a_{11}	0	0	$\cdots$	0
c_2	a_{21}	a_{22}	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
c_{i-1}	$a_{i-1,1}$	$a_{i-2,2}$	$\cdots$	$a_{i-1,i-1}$	0
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{i-1}	0

Berikut bentuk umum Metode Runge-Kutta orde empat adalah :

$$y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4$$

dengan :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_1 h, y_n + a_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + c_3 h, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3) \quad (2.17)$$

Dengan menjabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 dalam bentuk deret Taylor maka didapatkan nilai $b_2, b_3, b_4, a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ dan mengabaikan nilai turunan x maka diperoleh :

$$k_1 = f \tag{2.18}$$

$$k_2 = f\ \ y_n + a_{11}k_1$$

$$= f + h a_{11} f f_y + \frac{h^2}{2!} {a_{11}}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{3!} {a_{11}}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \tag{2.19}$$

$$k_3 = f\ \ y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2$$

$$= f + h(a_{21} + a_{22}) f f_y + h^2 \ \ a_{11}a_{22} f {f_y}^2 + \tfrac{1}{2}(a_{21} + a_{22})^2 f^2 f_{yy}$$

$$+ h^3 \ \ \frac{1}{2} {a_{11}}^2 a_{22} f^2 f_y f_{yy} + q_{11}(a_{21} + a_{22}) a_{22} f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ \frac{1}{6}(a_{21} + a_{22})^3 f^3 f_{yyy} \ \ + \cdots \tag{2.20}$$

$$k_4 = f\ \ y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3$$

$$= f + h(a_{31} + a_{32} + a_{33}) f f_y + h^2 \ \ a_{11}a_{32} f {f_y}^2$$

$$+ (a_{21} + a_{22}) a_{33} f {f_y}^2 + \frac{1}{2} \ \ a_{31} + a_{32} + \ \ \ a_{33} \ \ {}^2 f^2 f_{yy}$$

$$+ h^3 \ \ \frac{1}{2} {a_{11}}^2 a_{32} \ \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ \ f^2 f_y f_{yy} +$$

$$+ a_{33} \frac{(a_{21} + a_{22})^2}{2} f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ \ \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ \ \ a_{11}a_{32} + a(a_{21} + a_{22}) \ \ f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ a_{33}a_{22}a_{11} f {f_y}^3 + \frac{1}{6} \ \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ \ {}^3 f^3 f_{yyy} \ \ + \cdots \tag{2.21}$$

Untuk memperoleh nilai parameter $b_1, b_2, b_3, b_4, a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ adalah dengan cara mensubsitusikan persamaan (2.18), (2.19), (2.20), dan (2.21) ke persamaan (2.17), dan pergunakan pendekatan deret Taylor untuk mendapatkan nilai parameter tersebut sehingga diperoleh :

$$a_{11} = c_1$$

$$a_{21} + a_{22} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = c_3$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

$$b_2 a_{11} + b_3(a_{21} + a_{22}) + b_4(a_{31} + a_{32} + a_{33}) = \frac{1}{2}$$

$$b_2 {a_{11}}^2 + b_3(a_{21} + a_{22})^2 + b_4(a_{31} + a_{32} + a_{33})^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_2 {a_{11}}^3 + b_3(a_{21} + a_{22})^3 + b_4(a_{31} + a_{32} + a_{33})^3 = \frac{1}{4}$$

$$b_3 a_{22} a_{11} + b_4 a_{32} a_{11} + b_4 a_{33}(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{6}$$

$$b_3 a_{22} {a_{11}}^2 + b_4 a_{32} {a_{11}}^2 + b_4 a_{33}(a_{21} + a_{22})^2 = \frac{1}{12}$$

$$b_3 a_{11} a_{22}(a_{21} + a_{22}) + b_4(a_{31} + a_{32} + a_{33})$$

$$q_{21} q_{32} + q_{33}(a_{31} + a_{32} + a_{33}) = \frac{1}{8}$$

$$b_4 a_{33} a_{22} a_{11} = \frac{1}{24} \qquad (2.22)$$

Persamaan (2.22) terdiri dari 11 persamaan dan 13 parameter dan untuk mendapatkan bentuk dari Runge-Kutta orde 4 maka diambil 3 parameter bebas. Dengan memisalkan 3 parameter bebas :

$$c_1 = \frac{2}{5}, c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = 1 \qquad (2.23)$$

Kemudian subsitusikan 3 parameter c_1, c_2, c_3 ke persamaan (2.22) dan diperoleh :

$$b_1 = \frac{55}{360}, b_2 = \frac{125}{360}, b_3 = \frac{125}{360}, b_4 = \frac{55}{360}, a_{11} = \frac{2}{5}, a_{21} = \frac{-3}{20},$$

$$a_{22} = \frac{3}{4}, a_{31} = \frac{19}{44}, a_{32} = \frac{-15}{44}, a_{33} = \frac{40}{44} \qquad (2.24)$$

Selanjutnya subsitusikan persamaan (2.23) dan (2.24) pada persamaan (2.17), maka diperoleh rumus Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{360}\ 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4$$

dengan :

$$k_1 = hf\ x_n, y_n$$

$$k_2 = hf\ \ x_n + \frac{2h}{5}, y_n + \frac{2k_1}{5}$$

$$k_3 = hf\ \ x_n + \frac{3h}{5}, y_n - \frac{3k_1}{20} + \frac{3k_2}{4}$$

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{19k_1}{44} - \frac{15k_2}{44} + \frac{40k_3}{44}\right) \qquad (2.25)$$

Berikut adalah Runge-Kutta orde 4 Kuntzmann dalam bentuk Tabel Butcher :

Tabel 2.2 Tabel Butcher Runge-Kutta orde 4 Kuntzmann

0	0	0	0	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	0
$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{20}$	$\frac{3}{4}$	0	0
1	$\frac{19}{44}$	$\frac{-15}{44}$	$\frac{40}{44}$	0
	$\frac{55}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{55}{360}$

2.4 Galat Pemotongan

Metode numerik pada umumnya tidak mengutamakan hasil eksak, melainkan penyelesaian yang berbentuk pendekatan, oleh karena itu biasanya akan timbul *error* (galat) dari penyelesaian pendekatan. Semakin kecil galat maka semakin bagus solusi numerik yang didapat.

Galat pemotong adalah galat yang disebabkan karena suatu deret dengan suku-suku yang tidak terhingga dan dihentikan sehingga menjadi deret dengan suku-suku terhingga. Galat yang timbul dikarenakan nilai hampiran sebagai pengganti nilai eksak. Secara umum bentuk galat pemotongan sebagai berikut :

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h)$$

dengan $y(x)$ sebagai solusi eksak untuk persamaan diferensial biasa.

galat pemotong = solusi eksak – solusi hampiran.

Galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann didapat dengan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dibahas sebelumnya pada sub bab 2.3. Nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} yang telah disubsitusikan ke persamaan (2.17) akan menghasilkan nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan (2.25). Nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 yang akan diekspansikan kedalam deret Taylor sampai h^5. Kemudian lakukan langkah yang sama dengan persamaan (2.18) - (2.22) diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy} \right) + \frac{h^4}{24} \left(f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3 \right) + h^5 \left(\frac{31}{3600} f^4 f_{yyyy} + \frac{103}{1800} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{1}{30} f^3 {f_{yy}}^2 + \frac{91}{880} f^2 {f_y}^2 f_y \right) \quad (2.26)$$

Kemudian hasil pada persamaan (2.26) dibandingkan dengan ekspansi Taylor dari y_{i+1} sampai h^5, sehingga diperoleh galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut :

$$\text{Galat} = h^5 \left(\frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} - \frac{1}{900} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{1}{30} f^3 {f_{yy}}^2 + \frac{31}{2640} f^2 {f_y}^2 f_y - \frac{1}{120} f {f_y}^4 \right)$$

atau dapat di tulis sebagai berikut :

$$\text{Galat} = \frac{h^5}{39600} \left(-44 f^3 f_y f_{yyy} + 465 f^2 {f_y}^2 f_{yy} + 11 f^4 f_{yyyy} + 1320 f^3 {f_{yy}}^2 - 330 f {f_y}^4 \right) \quad (2.27)$$

2.5 Rata-rata Geometri

Rata-rata geometri dari sejumlah *n* angka positif ditetapkan sebagai akar pangkat n dari hasil kali nilai sebanyak n. Maka rata-rata geometri dari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah :

$$GM = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n}$$

Rata-rata geometri dengan $n = 2$

$$GM = \sqrt[2]{a_1 \times a_2}$$

2.6 Deret Binomial

Teorema 2.2 (Koko Martono, 1999) Untuk bilangan real *p*, fungsi $f(x) = (1 + x)^p$ dapat dinyatakan sebagai deret MacLaurin pada interval (-1,1) yang berbentuk :

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \cdots \ , |x| < 1$$

dengan

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!\,(p-n)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}; n = 0,1,2,\ldots$$

Bukti :

Pertama, akan ditentukan terlebih dahulu jari-jari kekonvergenannya,misalkan

$$u_n = \binom{p}{n} x^n$$

Karena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{p}{n+1} x^{n+1}}{\binom{p}{n} x^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!}}{\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}} \cdot x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{p-n}{n+1} = |x|$$

Berdasarkan uji banding diperoleh bahwa deret pangkatnya konvergen bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| > 1$. Jadi jari-jari kekonvergenan deret pangkatnya adalah $r = 1$.

Andaikan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \cdots, |x| < 1 \qquad (2.28)$$

akan ditunjukkan

$$y = (1+x)^p \qquad (2.29)$$

dengan memisalkan nilai $x = 0$ pada persamaan (2.28) maka diperoleh nilai $y(0) = 1$. Karena jari-jari kekonvergenan deret pangkatnya adalah $r = 1$, berarti fungsi y terdiferensialkan pada selang (-1,1) dengan

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{p}{n+1} x^{n}, \ |x| < 1 \qquad (2.30)$$

Kemudian mengalikan persamaan (2.30) dengan x, maka diperoleh :

$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1} \cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n}, \ |x| < 1$$

Karena deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{p}{n+1} x^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < 1$, maka kedua deret ini dapat dijumlahkan suku demi suku. Hasilnya adalah :

$$y' + xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{p}{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{p}{n+1} + n \binom{p}{n} \right] x^{n}$$

Karena

$$(n+1) \binom{p}{n+1} + n \binom{p}{n} = p \binom{p}{n}$$

maka

$$y' + xy' = p \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^{n} = py$$

Jadi, diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$(1 + x)y' = py, \text{ dengan } y(0) = 1$$

yang dapat diselesaikan dengan metode pemisah peubah sebagai berikut :

$$(1 + x)y' = py$$

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} = py$$

$$\frac{dy}{y} = p\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = p\ln|1+x| + \ln c, c > 0$$

$$\ln|y| = \ln c|1+x|^p$$

$$|y| = c|1+x|^p, c > 0$$

$$y = c(1+x)^p, c \neq 0$$

Karena $y(0) = 1$ maka $1 = c(1+0)^p$, sehingga $c = 1$. Sehingga solusi untuk persamaan (2.29) adalah $y = (1+x)^p$.

Dengan demikian terbukti bahwa :

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots, |x| < 1. \blacksquare$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian tugas akhir ini menggunakan studi literatur yang berfungsi untuk mengumpulkan informasi yang dibutuhkan berupa buku-buku, jurnal-jurnal, maupun sumber-sumber dari internet. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dibentuk kedalam rumusan yang memuat unsur aritmatik, selanjutnya subsitusikan pada rata-rata geometri.
2. Langkah selanjutnya ekspansikan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann pada deret Binomial, kemudian bandingkan dengan deret Taylor, sehingga menghasilkan Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri.
3. Menentukan nilai parameter Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dengan menggunakan perangkat lunak Maple.
4. Mensubsitusikan nilai parameter yang didapat kedalam Runge-Kutta orde empat Kuntzmann.
5. Simulasi numerik dengan menggunakan perangkat lunak Matlab.

BAB IV
PEMBAHASAN

Bab ini akan membahas tentang modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri, kemudian mengaplikasikan metode yang telah di peroleh ke dalam persamaan diferensial orde satu.

4.1 Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Geometri

Metode Runge-Kutta orde empat, baik klasik maupun Kutta telah banyak dimodifikasi, di antaranya modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata geometri, Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata kontra harmonik, Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik.

Selanjutnya, kembali pada bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, yaitu :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\ 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \qquad (4.1)$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{180}\ \frac{11k_1}{2} + \frac{25k_2}{2} + \frac{25k_3}{2} + \frac{11k_4}{2} \qquad (4.2)$$

Persamaan (4.2) dibentuk ke dalam rumusan yang memuat unsur aritmatik, sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{180}\ \frac{11k_1 + 11k_2}{2} + \frac{11k_2 + 11k_3}{2} + \frac{3k_2 + 3k_3}{2} + \frac{11k_3 + 11k_4}{2}$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{180}\ 11\frac{k_1 + k_2}{2} + 14\frac{k_2 + k_3}{2} + 11\frac{k_3 + k_4}{2} \qquad (4.3)$$

Persamaan (4.3) adalah metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan aritmatik. Yang mana bentuk $\frac{k_i+k_{i+1}}{2}$ adalah rata-rata aritmatik untuk dua variabel.

kemudian gantikan bentuk rata-rata aritmatik dengan bentuk rata-rata geometri $\sqrt{k_i k_{i+1}}$, sehingga terbentuk :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\left(11\sqrt{k_1 k_2} + 14\sqrt{k_2 k_3} + 11\sqrt{k_3 k_4}\right) \tag{4.4}$$

dengan :

$$k_1 = f(y_n) = hf \tag{4.5a}$$

$$k_2 = f(y_n + ha_{11}k_1) \tag{4.5b}$$

$$k_3 = f(y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)) \tag{4.5c}$$

$$k_4 = f(y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3)) \tag{4.5d}$$

Bentuk $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ didefenisikan sebagai rata-rata geometri, sehingga persamaan (4.4) di kenal sebagai modifikasi motode Rumge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri.

Nilai k_1, k_2, k_3, k_4 pada persamaan (4.5a) – (4.5d) dapat di peroleh dengan menentukan terlebih dahulu nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. Selanjutnya untuk menghindari adanya polinomial dalam bentuk akar, maka digunakan ekspansi deret Binomial sampai suku ke x^4 sebagai berikut :

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

Pertama nyatakan $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ ke dalam bentuk deret Binomial $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$, dengan memisalkan :

$$x = \frac{k_i k_{i+1}}{f^2} - 1; i = 1,2,3 \tag{4.6}$$

Untuk $i = 1$, maka diperoleh :

$$x = \frac{k_1 k_2}{f^2} - 1$$

Kemudian subsitusikan nilai k_1, k_2, k_3, k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.18) – (2.21) ke persamaan (4.6), langkah selanjutnya subsitusikan nilai x ke dalam deret Binomial, untuk mempermudah perhitungan misalkan $c_2 = a_{21} + a_{22}$ dan $c_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33}$, maka akan diperoleh $\overline{k_1 k_2}$ dalam bentuk polinomial sebagai berikut :

$$\overline{k_1 k_2} = f + \square \frac{a_{11} f f_y}{2} + \square^2 \frac{a_{11}{}^2 \; 2f^2 f_{yy} - f f_y{}^2}{8}$$

$$+ \square^3 \frac{a_{11}{}^3 \; 4f^3 f_{yyy} - 6f^2 f_y f_{yy} - 3f f_y{}^3}{48} + \cdots \qquad (4.7)$$

$$\overline{k_2 k_3} = f + \square \frac{a_{11} + c_2 \; f f_y}{2}$$

$$+ \square^2 \frac{a_{11}{}^2 + c_2{}^2 \; f^2 f_{yy}}{4} + \frac{4a_{11}a_{22} + 2a_{11}c_2 - a_{11}{}^2 - c_2{}^2}{8} f f_y{}^2$$

$$+ \square^3 \frac{a_{11}{}^3 + c_2{}^2}{12} f^3 f_{yyy} + \frac{2a_{11}{}^2 a_{22} - a_{11}{}^3 + c_2{}^2 a_{11}}{8}$$

$$+ \frac{c_2 a_{11}{}^2 + 4c_2 a_{11} a_{22}}{8} f^2 f_y f_{yy} + \frac{4a_{11}{}^2 a_{22} - c_2{}^2 a_{11} - c_2 a_{11}{}^2 + c_2{}^3}{16}$$

$$+ \frac{a_{11}{}^3 - 4c_2 a_{11} a_{22}}{16} f f_y{}^3 \qquad (4.8)$$

$$\overline{k_3 k_4} = f + \square \frac{(c_2 + c_3) f f_y}{2} + \square^2 \frac{4a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{32} + 4a_{33}c_2}{8}$$

$$+ \frac{2c_2 c_3 - c_3{}^2 - c_2{}^2}{8} f f_y{}^2 + \frac{(c_2{}^2 + c_3{}^2)}{4} f^2 f_{yy} + \square^3 \frac{(c_3{}^3 + c_2{}^3)}{12} f^3 f_{yyy}$$

$$+ \frac{c_2 c_3{}^2 + c_2{}^2 c_3 - c_3{}^3 - c_2{}^3}{8} + \frac{(c_2{}^2 a_{33} + c_3 a_{11}{}^2 a_{32} + 2c_3 a_{11} a_{32}}{4}$$

$$+ \frac{2c_3 c_2 a_{33} + 2c_2 a_{11} a_{22}) + a_{11}{}^2 a_{22}}{4} f^2 f_y f_{yy} + \frac{c_2{}^3 + c_3{}^3 - c_2{}^2 c_3}{16}$$

$$- \frac{c_2 c_3{}^2}{16} + \frac{2c_3 a_{11} a_{22} - c_3 a_{11} a_{32} + c_2 a_{11} a_{32} - c_3 c_2 a_{33}}{4}$$

$$+\ \frac{2c_3a_{11}a_{22}a_{33}}{4}\ \ f{f_y}^3 \tag{4.9}$$

Kemudian subsitusikan nilai-nilai pada $\overline{k_1k_2}$, $\overline{k_2k_3}$, $\overline{k_3k_4}$ yang telah diperoleh, ke dalam persamaan (4.4) dan diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + hf + h^2\frac{11c_3 + 25c_2 + 25a_{11}}{72}ff_y$$

$$+\ h^3\ \frac{25{c_2}^2 + 25{a_{11}}^2 + 11{c_3}^2}{144}f^2f_{yy}$$

$$+\ \frac{(a_{11}\ \ 11a_{32} + 25a_{22} + 7c_2\ \ + 11c_2a_{33}}{72} + \frac{22c_3c_2 - 25{c_2}^2}{288}$$

$$+\ \frac{-25{a_{11}}^2 - 11{c_3}^2}{288}f{f_y}^2\ \ +h^4\frac{25{a_{11}}^3 + 11{c_3}^3 + {c_2}^3}{432}f^3f_{yyy}$$

$$+\ \frac{25{a_{11}}^3 - 14{c_2}^2a_{11} + 11{c_3}^3 - 11{c_3}^2c_2 + 25{c_2}^3 - 11c_3{c_2}^2}{576}$$

$$+\ \frac{14{a_{11}}^2a_{22} - 25c_2a_{11}a_{22} - 11c_3c_2a_{33} + 11{c_2}^2a_{32} + 11c_3a_{11}a_{22}}{144}$$

$$+\ \frac{11c_2a_{11}a_{32} - 11c_3a_{11}a_{32} + 22a_{11}a_{22}a_{33}}{144}\ \ f{f_y}^3$$

$$+\ \frac{11{c_2}^2c_3 - 25{c_2}^3 + 11c_2{c_3}^2 - 11{c_3}^3 - 25{a_{11}}^3}{288}$$

$$+\ \frac{11{c_2}^2a_{33} + 11c_3{a_{11}}^2a_{32} + 7c_2{a_{11}}^2 + 7{c_2}^2a_{11} + 25{a_{11}}^2a_{22}}{144}$$

$$+\ \frac{11c_2c_3a_{33} + 25c_2a_{11}a_{22} + 11c_3a_{11}a_{32}}{72}\ \ f^2f_yf_{yy} \tag{4.10}$$

Persamaan diatas akan dibandingkan dengan deret Taylor berikut ini :

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \ f f_y{}^2 + f^2 f_{yy}$$
$$+ \frac{h^4}{24} \ f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3$$

Selanjutnya dengan membandingkan koefisien-koefisien h^n sebagai berikut :

$$h^2 f f_y \quad = \frac{11c_3 + 25c_2 + 25a_{11}}{72} = \frac{1}{2}$$

$$h^3 f f_y{}^2 \quad = \frac{(a_{11} \ 11a_{32} + 25a_{22} + 7c_2 \ + 11c_2 a_{33}}{72}$$
$$+ \frac{22c_3 c_2 - 25{c_2}^2 - 25{a_{11}}^2 - 11{c_3}^2}{288} = \frac{1}{6}$$

$$h^3 f^2 f_{yy} = \frac{25{c_2}^2 + 25{a_{11}}^2 + 11{c_3}^2}{144} = \frac{1}{6}$$

$$h^4 f^3 f_{yyy} = \frac{25{a_{11}}^3 + 11{c_3}^3 + 25{c_2}^3}{432} = \frac{1}{24}$$

$$h^4 f f_y{}^3 \quad = \frac{25{a_{11}}^3 - 14{c_2}^2 a_{11} + 14 c_2 {a_{11}}^2 + 11{c_3}^3 - 11{c_3}^2 c_2 + 25{c_2}^3}{576}$$
$$\frac{-11c_3{c_2}^2}{576} + \frac{14{a_{11}}^2 a_{22} - 25c_2 a_{11} a_{22} - 11c_3 c_2 a_{33} + 11{c_2}^2 a_{33}}{144}$$
$$+ \frac{11c_3 a_{11} a_{22} + 11c_2 a_{11} a_{32} - 11c_3 a_{11} a_{32} + 22a_{11} a_{22} a_{33}}{144} = \frac{1}{24}$$

$$h^4 f^2 f_y f_{yy} = \frac{11{c_2}^2 c_3 - 25{c_2}^3 + 11c_2{c_3}^2 - 11{c_3}^3 - 25{a_{11}}^3}{288}$$
$$+ \frac{11{c_2}^2 a_{33} + 11c_3{a_{11}}^2 a_{32} + 7c_2{a_{11}}^2 + 7{c_2}^2 a_{11} + 25{a_{11}}^2 a_{22}}{144}$$
$$+ \frac{11c_2 c_3 a_{33} + 25c_2 a_{11} a_{22} + 11c_3 a_{11} a_{32}}{72} = \frac{1}{6}$$

Untuk memudahkan mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan terlebih dahulu dengan mengambil nilai :

$$c_2 = \frac{3}{5}, c_3 = 1$$

Maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\square^2 f f_y \quad : \frac{25}{72} a_{11} = \frac{5}{36} \qquad (4.11a)$$

$$\square^3 f {f_y}^2 \quad : \frac{11}{72} a_{11} a_{32} + \frac{25}{72} a_{22} a_{11} + \frac{7}{120} a_{11} + \frac{11}{120} a_{33}$$

$$- \frac{25}{288} {a_{11}}^2 = \frac{137}{720} \qquad (4.11b)$$

$$\square^3 f^2 f_{yy} \quad : \frac{25}{144} {a_{11}}^2 = \frac{1}{36} \qquad (4.11c)$$

$$\square^4 f {f_y}^3 \quad : \frac{25}{576} {a_{11}}^3 - \frac{7}{800} a_{11} + \frac{7}{72} {a_{11}}^2 a_{22} - \frac{7}{480} {a_{11}}^2 - \frac{1}{36} a_{22} a_{11}$$

$$+ \frac{11}{600} a_{33} + \frac{11}{72} a_{11} a_{22} a_{33} - \frac{1}{360} a_{11} a_{32} = \frac{227}{7200} \qquad (4.11d)$$

$$\square^4 f^2 f_y f_{yy} : \frac{143}{1200} a_{33} + \frac{21}{720} {a_{11}}^2 + \frac{11}{144} {a_{11}}^2 a_{32} + \frac{63}{3600} a_{11} - \frac{25}{288} {a_{11}}^3$$

$$+ \frac{25}{144} {a_{11}}^2 a_{22} + \frac{15}{72} a_{22} a_{11} + \frac{11}{72} a_{11} a_{32} = \frac{673}{3600} \qquad (4.11e)$$

$$\square^4 f^3 f_{yyy} \; : \frac{25}{432} {a_{11}}^3 = \frac{1}{270} \qquad (4.11f)$$

Kemudian subsitusikan nilai $a_{11} = \frac{2}{5}$ kedalam persamaan (4.11a) – (4.11f) sehingga akan didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\frac{143}{1200} a_{33} + \frac{11}{150} a_{32} + \frac{1}{9} a_{22} = \frac{217}{1200} \qquad (4.12a)$$

$$\frac{1}{225} a_{22} - \frac{11}{600} a_{33} + \frac{11}{180} a_{22} a_{33} - \frac{11}{900} a_{32} = \frac{83}{2400} \qquad (4.12b)$$

$$\frac{11}{180} a_{32} + \frac{5}{36} a_{22} + \frac{11}{120} a_{33} = \frac{217}{1200} \qquad (4.12c)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan pada persamaan (4.12a) – (4.12c), maka didapatkan nilai parameternya, yaitu sebagai berikut :

$$a_{11} = \frac{2}{5}, a_{21} = \frac{159}{500} - \frac{3}{1000}\sqrt{30061},\; a_{22} = \frac{141}{500} + \frac{3}{1000}\sqrt{30061}$$

$$a_{31} = \frac{-134}{55} + \frac{7}{440}\sqrt{30061}, a_{32} = \frac{312}{55} - \frac{3}{88}\sqrt{30061},$$

$$a_{33} = \frac{-123}{55} + \frac{1}{55}\sqrt{30061} \qquad (4.13)$$

Langkah terakhir yaitu dengan mensubsitusikan semua nilai parameter yang telah didapat pada persamaan (4.13) kedalam persamaan (4.4), dan didapatkan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\left(11\sqrt{k_1 k_2} + 14\sqrt{k_2 k_3} + 11\sqrt{k_3 k_4}\right)$$

dengan :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{5}, y_n + \frac{2h}{5}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3h}{5}, y_n + h\left(\left(\frac{159}{500} - \frac{3}{1000}\sqrt{30061}\right)k_1 + \left(\frac{141}{500} + \frac{3}{1000}\sqrt{30061}\right)k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\left(\frac{-134}{55} + \frac{7}{440}\sqrt{30061}\right)k_1 + \left(\frac{312}{55} - \frac{3}{88}\sqrt{30061}\right)k_2 + \left(\frac{-123}{55} + \frac{1}{55}\sqrt{30061}\right)k_3\right)\right) \quad (4.14)$$

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Geometri

Menentukan galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri dapat dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah yang sama dalam menentukan nilai parameter dari rumusan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri yang telah dibahas pada sub bab 4.1 sebelumnya.

Nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} yang telah disubsitusikan ke dalam persamaan (4.4) dan menghasilkan nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan (4.14). Nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 ini yang kemudian diekspansikan kedalam deret Taylor sampai h^5. Kemudian lakukan langkah yang sama dengan persamaan (4.7) - (4.10) diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6} \; ff_y{}^2 + f^2 f_{yy}$$

$$+ \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y{}^3$$

$$+ h^5 \; \frac{31}{3600} f^4 f_{yyyy} + \frac{12791 - 14\sqrt{30061}}{180000} \; f^3 f_y f_{yyy}$$

$$+ \frac{947 + 16\sqrt{30061}}{120000} \; f^3 f_{yy}{}^2$$

$$+ \frac{300264855 - 63833\sqrt{30061}}{1815000000} \; f^2 f_y{}^2 f_{yy}$$

$$+ \frac{-848674 - 3579\sqrt{30061}}{22000000} \; ff_y{}^4 \qquad (4.15)$$

Kemudian bandingkan hasil pada persamaan (4.15) dengan ekspansi Taylor sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6} \; ff_y{}^2 + f^2 f_{yy}$$

$$+ \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y{}^3$$

$$+ h^5 \; \frac{f^4 f_{yyyy} + 7f^3 f_y f_{yyy} + 11f^2 f_y{}^2 f_{yy} + ff_y{}^4}{120} \qquad (4.16)$$

Dengan membandingkan hasil pada persamaan (4.15) dan (4.16) sehingga di peroleh galat metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri sebagai berikut :

$$\text{Galat} = h^5 \; \frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} + \frac{2291 - 14\sqrt{30061}}{180000} \; f^3 f_y f_{yyy}$$

$$+ \frac{947 - 16\sqrt{30061}}{120000} \; f^3 f_{yy}{}^2$$

$$+ \frac{12171805 - 5803\sqrt{30061}}{165000000} \; f^2 f_y{}^2 f_{yy}$$

$$+ \frac{3096022 - 10737\sqrt{30061}}{66000000} \; ff_y{}^4$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$
\begin{aligned}
\text{Galat} = \frac{h^5}{990000000}\ & 275000 f^4 f_{yyyy} + (12600500 \\
& - 77000\sqrt{30061}) f^3 f_y f_{yyy} + (7812750 - 132000\sqrt{30061}) f^3 {f_{yy}}^2 \\
& + 73030830 - 34818\sqrt{30061}) \ f^2 {f_y}^2 f_{yy} \\
& + (46440330 - 161055\sqrt{30061})) f {f_y}^4
\end{aligned}
$$

4.3 Simulasi Numerik

Untuk melakukan perbandingan komputasi, rumusan yang diperoleh pada persamaan (4.12) yang disebut dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Geometri (RKKuG) akan dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu), Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Kontra Harmonik(RKKuC$_o$H) dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Harmonik (RKKuH) yang diterapkan dalam kasus persamaan diferensial berikut :

Contoh 4.1 Persamaan diferensial $y' = y$ dengan syarat awal $y\ 0 = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Solusi eksak $Y = \exp(x)$ dengan $h = 0.1$ dan $n = 10$. Tentukan galat dari persamaan diferensial diatas dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Geometri, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Kontra Harmonik dan Runge-Kutta orde empat Harmonik

Penyelesaian :

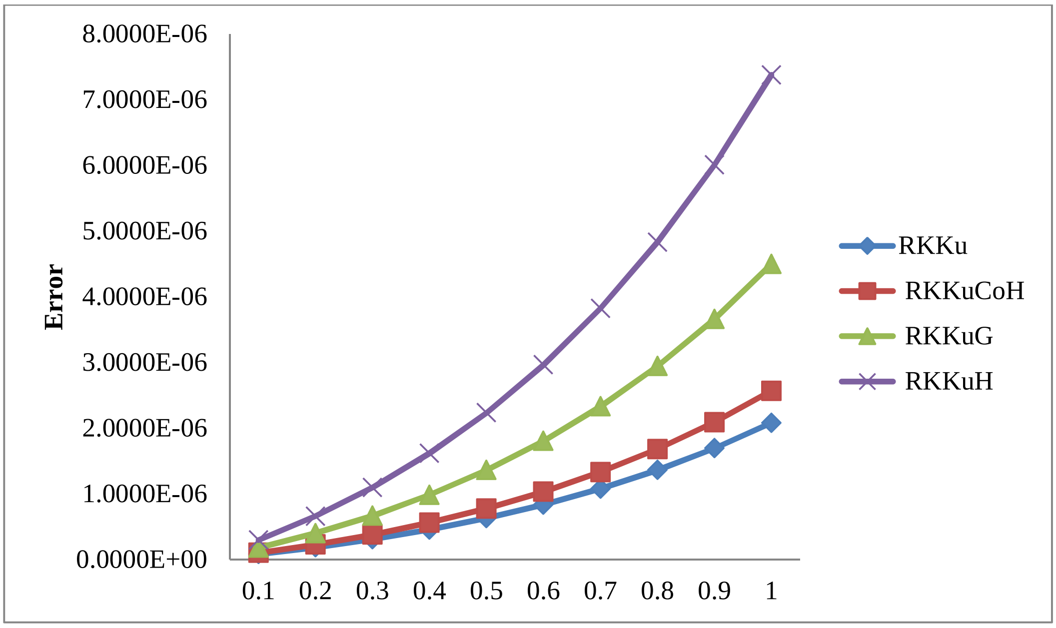
Hasil eksak dan galat yang terjadi pada setiap metode RKKu, RKKuG, RKKuCoH, RKKuH dapat dillihat pada tabel 4.1 sebagai berikut :

Tabel 4.1 Solusi Eksak dan Galat untuk Persamaan $y' = y$

No	X	Y (Solusi Eksak)	*Error*			
			RKKu	RKKuG	RKKuCoH	RKKuH
1	0.1	1.1052	8.4742E-08	1.8291E-07	1.0453E-07	3.0000E-07
2	0.2	1.2214	1.8731E-07	4.0430E-07	2.3106E-07	6.6311E-07
3	0.3	1.3499	3.1051E-07	6.7023E-07	3.8305E-07	1.0993E-06
4	0.4	1.4918	4.5756E-07	9.8763E-07	5.6444E-07	1.6198E-06
5	0.5	1.6487	6.3210E-07	1.3644E-06	7.7976E-07	2.2378E-06
6	0.6	1.8221	8.3829E-07	1.8094E-06	1.0341E-06	2.9677E-06

7	0.7	2.0138	1.0809E-06	2.3330E-06	1.3333E-06	3.8265E-06
8	0.8	2.2255	1.3652E-06	2.9467E-06	1.6841E-06	4.8330E-06
9	0.9	2.4596	1.6974E-06	3.6637E-06	2.0938E-06	6.0090E-06
10	1	2.7183	2.0843E-06	4.4989E-06	2.5712E-06	7.3789E-06

Berdasarkan tabel 4.1 diperoleh grafik yang ditunjukan pada gambar 4.1



Gambar 4.1 Grafik Perbandingan Galat Contoh 4.1

Pada contoh 4.1 dapat dilihat bahwa nilai galat pada RKKu lebih baik dibandingkan dengan RKKuG, RKKuCoH, dan RKKuH.

Contoh 4.2 Persamaan diferensial $y' = \frac{1}{y}$ dengan syarat awal $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Solusi eksak $Y = \sqrt{2x+1}$ dengan $h = 0.1$ dan $n = 10$. Tentukan galat dari persamaan diferensial diatas dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Geometri, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Kontra Harmonik dan Runge-Kutta orde empat Harmonik.

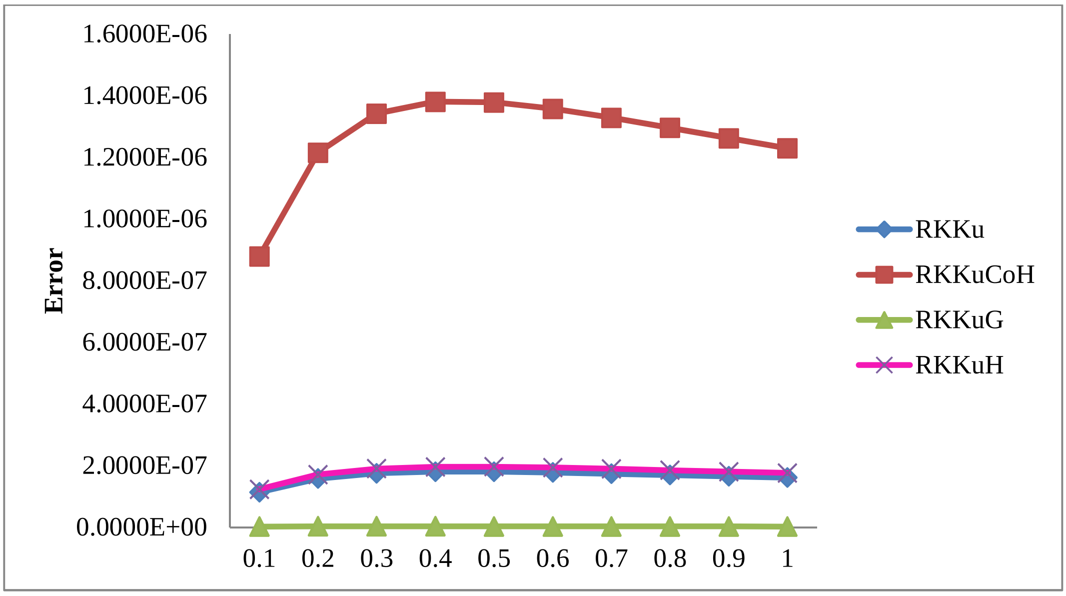
Penyelesaian :

Hasil eksak dan galat yang terjadi pada setiap metode RKKu, RKKuG, RKKuCoH, RKKuH dapat dilihat pada tabel 4.2 sebahai berikut :

Tabel 4.2 Solusi Eksak dan Galat untuk Persamaan $y' = \frac{1}{y}$

No	X	Y (Solusi Eksak)	*Error*			
			RKKu	RKKuG	RKKuCoH	RKKuH
1	0.1	1.0954	1.1391E-07	2.3281E-09	8.7899E-07	1.2287E-07
2	0.2	1.1832	1.5792E-07	2.9231E-09	1.2149E-06	1.7107E-07
3	0.3	1.2649	1.7481E-07	3.0135E-09	1.3421E-06	1.8990E-07
4	0.4	1.3416	1.8004E-07	2.9471E-09	1.3804E-06	1.9596E-07
5	0.5	1.4142	1.7994E-07	2.8349E-09	1.3784E-06	1.9612E-07
6	0.6	1.4832	1.7735E-07	2.7151E-09	1.3576E-06	1.9348E-07
7	0.7	1.5492	1.7361E-07	2.6005E-09	1.3283E-06	1.8954E-07
8	0.8	1.6125	1.6940E-07	2.4952E-09	1.2956E-06	1.8505E-07
9	0.9	1.6733	1.6508E-07	2.3997E-09	1.2622E-06	1.8040E-07
10	1	1.7321	1.6080E-07	2.3134E-09	1.2292E-06	1.7579E-07

Berdasarkan tabel 4.2 diperoleh grafik yang ditunjukan pada gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik Perbandingan Galat Contoh 4.2

Pada contoh 4.2 nilai galat RKKuG lebih baik dari pada RKKu, RKKuCoH, RKKuH.

Contoh 4.3 Persamaan diferensial $y' = -y$ dengan syarat awal $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Solusi eksak $Y = \exp(-x)$ dengan $h = 0.1$ dan $n = 10$. Tentukan galat dari persamaan diferensial diatas dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Geometri, Runge-Kutta orde empat Kuntzmann Kontra Harmonik dan Runge-Kutta orde empat Harmonik

Penyelesaian :

Hasil eksak dan galat yang terjadi pada setiap metode RKKu, RKKuG, RKKuCoH, RKKuH dapat dilihat pada tabel 4.3 sebagai berikut :

Tabel 4.3 Solusi Eksak dan Galat untuk Persamaan $y' = -y$

No	X	Y (Nilai Eksak)	*Error*			
			RKKu	RKKuG	RKKuCoH	RKKuH
1	0.1	0.9048	8.1964E-08	1.9032E-01	1.8292E-07	3.2231E-07
2	0.2	0.8187	1.4832E-07	3.8065E-01	3.3104E-07	5.8328E-07
3	0.3	0.7408	2.0132E-07	5.7269E-01	4.4931E-07	7.9166E-07
4	0.4	0.6703	2.4288E-07	7.6819E-01	5.4207E-07	9.5510E-07
5	0.5	0.6065	2.7471E-07	9.6888E-01	6.1310E-07	1.0803E-06
6	0.6	0.5488	2.9828E-07	1.1765E+00	6.6571E-07	1.1729E-06
7	0.7	0.4966	3.1488E-07	1.3929E+00	7.0275E-07	1.2382E-06
8	0.8	0.4493	3.2562E-07	1.6199E+00	7.2672E-07	1.2805E-06
9	0.9	0.4066	3.3146E-07	1.8597E+00	7.3975E-07	1.3034E-06
10	1	0.3679	3.3324E-07	2.1140E+00	7.4373E-07	1.3104E-06

Pada contoh 4.3 dapat dilihat bahwa nilai galat pada Runge-Kutta orde empat Kuntzmann lebih baik dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri, kontra harmonik, dan harmonik. dan contoh soal 4.3 Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri memiliki nilai galat yang jauh lebih besar dari pada galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik dan rata-rata harmonik. Ini terjadi dikarenakan perbedaan tanda untuk nilai k_i dan k_{i+1} dan $\overline{k_i k_{i+1}}$. Contoh 4.3 membuktikan bahwa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri ternyata terbatas untuk beberapa kasus tertentu.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya maka kesimpulan dari tugas akhir ini yang memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri adalah sebagai berikut :

1. Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\left(55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4\right)$$

2. Setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata geometri di dapat bentuk Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri (RKKuG) sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\left(11\sqrt{k_1k_2} + 14\sqrt{k_2k_3} + 11\sqrt{k_3k_4}\right)$$

dengan :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{5}, y_n + \frac{2h}{5}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3h}{5}, y_n + h\left(\left(\frac{159}{500} - \frac{3}{1000}\sqrt{30061}\right)k_1 + \left(\frac{141}{500} + \frac{3}{1000}\sqrt{30061}\right)k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\left(\frac{-134}{55} + \frac{7}{440}\sqrt{30061}\right)k_1 + \left(\frac{312}{55} - \frac{3}{88}\sqrt{30061}\right)k_2 + \left(\frac{-123}{55} + \frac{1}{55}\sqrt{30061}\right)k_3\right)\right)$$

3. Galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\text{Galat RKKuG} = \frac{\square^5}{990000000}\ & 275000 f^4 f_{yyyy} + (12600500 \\
& - 77000\sqrt{30061}) f^3 f_y f_{yyy} \\
& + (7812750 - 1320000\sqrt{30061}) f^3 {f_{yy}}^2 \\
& + \ 73030830 - 34818\sqrt{30061})\ f^2 {f_y}^2 f_{yy} \\
& + (46440330 - 161055\sqrt{30061})) f {f_y}^4
\end{aligned}
$$

4. Simulasi yang diterapkan dalam 3 contoh persamaan diferensial orde satu dengan menggunakan metode RKKu, RKKuG, RKKuCoH, RKKuH diperoleh bahwa pada contoh 4.1 dengan persamaan $y' = y$ galat metode RKKu lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya. Pada contoh 4.2 dengan persamaan $\frac{1}{y}$ galat RKKuG lebih baik dibandingkan denngan metode lainnya. Sedangkan untuk contoh 4.3 dengan persamaan $y' = -y$ galat RKKu lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya, dan RKKuG memiliki galat yang jauh lebih besar. Ini disebabkan perbedaan tanda untuk nilai k_i dan k_{i+1} dan $\overline{k_i k_{i+1}}$, pada contoh 4.3 membuktikan bahwa Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri terbatas untuk beberapa kasus tertentu.

5.2 Saran

Penulisan Skripsi ini penulis hanya menggunakan Rata-rata geometri dalam memodifikasi Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann. Oleh karena itu penulis menyarankan agar pembaca dapat memodifikasi dengan menggunakan variasi rata-rata yang lain seperti Kontra Harmonik, Harmonik, dan Centroidal.

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk. *New Third Order Runge-Kutta Based on Contraharmonic mean for Stiff Problems,* Vol. 3 no. 8,365-376. School of Mathematical Sciences Universiti Kebangsaan Malaysia. 2009.

Agbeboh, G. U dkk. *Implementation of a New 4th order rungekutta formula for solving initial value problem*. Vol 2(4), pp. 089-098, 2007.

Ardianti, E. P. Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Harmonik. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.* 2011.

Bartle, Robert. G dan Sherbert, Donald. R. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons. New York. 2000.

Cheney, Ward dan David Kincaid. *Numerical for Computing, Sixth Edition.* Thomson Higher Education. USA. 2008.

Darmond, John. R. *Numerical Methods for Ordinay Differential Equation.* CRC. Boca Raton. New York. London. 2000.

Djojodihardjo, Harijono. *Metode Numerik.* PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta. 2000.

Evans, D. J. *A New 4th Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problem With Error Control*. *Intern J. Computer Math.* Vol.39. halaman 217-227. 1991.

Evans, D. J dan Yaakub. *A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based On The Contra-Harmonik Mean. Inter J .Computer math.* Vol 57. halaman 249-256.1995.

Imran, M. Perbandingan Modifikasi Metode RK-4 Berdasarkan Variasi Rata-rata, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau. 2002.

Lambert, J. D. *Numerical Methods for Ordinay Differential System The Initial Value.* John Wiley & Sons. New York. 1993.

Lapidus, Leon dan John H.Seinfeld. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equation.* Academic Press. New York. 1971.

Martono, K. *Kalkulus* . Erlangga. Bandung. 1999.

Munir, Rinaldi. *Metode Numerik,* edisi revisi. Informatika. Bandung. 2008.

Roni. Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.* 2011.

Sanugi, B. B dan Evans, D. J. *A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based On The Harmonik Mean. Inter J. Computer Math.* Vol.50. halaman 113-118.1994.

Supinah. Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasif Riau*. 2010.